消散項を持つ作用素のスペクトルに関する考察 : SCHRODINGER 方程式と波動方程式 : (スペクトル・散乱理論とその周辺)

渡辺, 一雄

数理解析研究所講究録
1479 巻 2006 年 75-86

消散項を持つ作用素のスペクトルに関する考察 (SCHRÖDINGER 方程式と波動方程式)

学習院大学理学部　渡辺　一雄 (KAZUO WATANABE)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GAKUSHUIN UNIVERSITY

§1. INTRODUCTION

この研究は, 門脇光輝氏 (愛媛大学), 中澤秀夫氏 (千葉工業大学) との共同研究である. 先ず, 以前に得られた結果 [2,3] を記し, さらに §2 における結果を考慮し波動方程式において rank 1 の消散項を持つ波動方程式においてどの点が問題になるかを§6 の中で明らかにしていくが, 先に述べておくなら, 実軸上の spectral singularity の次数が問題となる. 現在最も問題となっている点は, §6 の中に現れていること注意しておく. [4]

消散項を持つ 3 つの方程式を考える:

$$
\begin{cases} i\partial_t u(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \alpha\langle\delta(\cdot), u(\cdot,t)\rangle\delta(x), \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{1.1}
$$

$\alpha \in \mathbb{C}$, $(\mathrm{Im}\alpha \le 0)$ (右辺の詳しい定義は §2),

$$
\begin{cases} w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) + b(x)w_t(x,t) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^N, \\ w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \end{cases} \tag{1.2}
$$

ここで $N \ge 1$, $b(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ は非負関数,

$$
\begin{cases} w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+, \\ i\sqrt{\sigma}w(0,t) - w_r(0,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{1.3}
$$

初期値を

$$
w(0,x) = w_0(x), \qquad w_t(0,x) = w_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,
$$

とする, ここで $\sigma \in \mathbb{C}$.

一般に, Hilbert 空間 X 内の作用素 A が消散型であるとはここでは次を満たすこととする:

$$
\mathrm{Im}\langle Au, u\rangle \le 0, \quad u \in D(A),
$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積, $D(A)$ は作用素 A の定義域である.[1]

(1.1), (1.2) は作用素を使ってそれぞれ次のように表すことができる:

$$
H_\alpha = H_0 + \alpha\langle\cdot,\delta\rangle\delta
$$

として $(\mathrm{Im}\alpha \le 0)$,

$$
iu_t(t) = H_\alpha u(t), \quad u(0) = f, \tag{1.1'}
$$

[1] 定義の仕方が異なることがある.cf. [4,6]

($\alpha = 0$ とすると自己共役),

$$H_b = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & -b \end{pmatrix}, \quad \vec{w}(t) = \begin{pmatrix} w(\cdot, t) \\ w_t(\cdot, t) \end{pmatrix}$$

として,

$$i\vec{w}_t(t) = H_b\vec{w}(t), \quad \vec{w}(0) = \begin{pmatrix} w_0(\cdot) \\ w_1(\cdot) \end{pmatrix} \tag{1.2'}$$

($b = 0$ とすると自己共役). 共に消散作用素になっていることが分かる (定義域等は §2, §3 を参照).

ここでの目標は, "解の $t \to +\infty$ 挙動", 上の方程式を作用素で書き表したときの "スペクトルの構造", また, その両者の関係を調べることにある. 一般に, 消散作用素 A に対して次の発展方程式

$$i\partial_t u(t) = Au(t), \quad u(0) = f$$

の解 $u(t)$ は

$$u(t) = e^{-itA}f$$

で与えられる. 消散作用素 A の固有値 λ が一つだけで $\mathrm{Im}\lambda < 0$ となるとする.[2] f が固有値 λ の固有ベクトルならば

$$u(t) = e^{-itA}f = e^{-it\lambda}f \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

となることが容易にわかる. しかし,

$$u(t) \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

から初期値 f が固有ベクトルであるとは一般には言えない. (1.1) は逆も実際に成り立つ例となっていることをこれから示していく.

また, (1.2) に関しては, 下半平面すべてが点スペクトルである場合, あるいは, スペクトルの位置に関してひとつの評価を与える.

(1.3) はポテンシャルとしては消散項をもたず, 境界条件のみがある場合にも消散状態があることを示す一つの例となっている.

以下, §2 で (1.1) に関する結果, §3 で (1.2) および (1.3) に関する結果を記し, 証明の概略をそれぞれ §4, §5 で記すことにする.

§2. Results for (1.1)

(cf.[2]) 結果を述べるために先ず必要な記号等を準備する. A を Hilbert 空間 X

---

[2] スペクトルは全て複素下半平面にある. また実数が連続スペクトルとなっていることを想定している.

の作用素として

$$\sigma_p(A)=\left\{ z\in\sigma(A) \;\middle|\; \text{there exists}\, f\neq 0\, \text{such that}\, Af=zf \right\}$$

: the set of point spectrum of A.

$$\sigma_r(A)=\left\{ z\in\sigma(A) \;\middle|\; z\notin\sigma_p(A), \text{the range space of}\ (A-z)\ \text{is not dense in}\, X \right\}$$

: the set of residual spectrum of A.

$\sigma_c(A)=\{\, z\in\sigma(A)\setminus(\sigma_p(A)\cup\sigma_r(A))\,\}$: the set of continuous spectrum of A.

$\sigma_{ess}(A)=\{\, z\in\sigma(A)\setminus\sigma_d(A)\,\}$: the set of essential spectrum of A,

where $\sigma_d(A)=\left\{ z\in\sigma(A) \;\middle|\; z\, \text{is an isolated eigenvalue with finite multiplicity} \right\}$

(the set of discrete spectrum).

$$\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}),\qquad H_\alpha=-d^2/dx^2+\alpha\langle\cdot,\delta\rangle\delta(x)$$

とする. ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $H^1(\mathbb{R})$ と $H^{-1}(\mathbb{R})$ の coupling を意味する.[3] また, H_α の定義域は次のようになる (cf.[1]):

$$D(H_\alpha)=\{U\in H^1(\mathbb{R});\ U'(0+)-U'(0-)=\alpha U(0), \chi_{(0,\infty)}U''+\chi_{(-\infty,0)}U''\in\mathcal{H}\},$$

ここで χ_I は I 上の特性関数である.

Theorem 2.1 (Spectral structure of H_α). $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$ とし, $\alpha_1\leqq 0$, $\alpha_2\leqq 0$ とする. このとき H_α のスペクトルは次で与えられる:

$$\sigma(H_\alpha)=\begin{cases} [0,\infty)\cup\{-\frac{\alpha^2}{4}\} & (\alpha_1<0),\\ [0,\infty) & (\alpha_1=0). \end{cases}$$

$\sigma(H_\alpha)$ の完全な分類は,

$$\sigma_{ess}(H_\alpha)=\sigma_c(H_\alpha)=[0,\infty),\quad \sigma_r(H_\alpha)=\emptyset,$$

$$\sigma_p(H_\alpha)=\begin{cases} \sigma_d(H_\alpha)=\{-\frac{\alpha^2}{4}\} & (\alpha_1<0),\\ \emptyset & (\alpha_1=0). \end{cases}$$

さらに, $-\frac{\alpha^2}{4}$ $(\alpha_1\neq 0)$ に対応する射影 $P_{-\alpha^2/4}$ は, 次のように与えられる:

(P) $$P_{-\alpha^2/4}f=-\alpha/2\langle f, e^{(\overline{\alpha}|\cdot|)/2}\rangle e^{(\alpha|x|)/2}.$$

次の定理を述べるために以下のことにする:

$$\mathrm{Ker}P_{-\frac{\alpha^2}{4}}+\mathrm{Range}P_{-\frac{\alpha^2}{4}}=\mathcal{H},\quad \mathrm{Ker}P_{-\frac{\alpha^2}{4}}\cap\mathrm{Range}P_{-\frac{\alpha^2}{4}}=\{0\}.$$

これにより, 次のように $f\in\mathcal{H}$ は一意に分解される:

(2.1) $$f=f_s+f_d\in\mathrm{Ker}P_{-\frac{\alpha^2}{4}}+\mathrm{Range}P_{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

解の $t\to+\infty$ での挙動を考察するために $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への波動作用素を次のように定義する:

$$W(\alpha)=\text{s-}\lim_{t\to+\infty}e^{itH_0}e^{-itH_\alpha}$$

[3] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{H}$ の内積の意味でも使うことにする

Theorem 2.2.

(i) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ とする. このとき

$$\mathrm{Ker}W(\alpha) = \mathrm{Range}P_{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

(ii) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$ とする. このとき,

$$\mathrm{Ker}W(i\alpha_2) = \{0\}.$$

Corollary 2.3 (The classification of asymptotics by the initial data).

(i) α は *Theorem 1.3* の (i) と同じとする. このとき $f \in \mathcal{H}$ の分解を (2.1) とすると, 次のようになる:

$$\text{(S)} \qquad f_s \neq 0 \quad \textit{if and only if} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} \|e^{-itH_\alpha}f - e^{-itH_0}W(\alpha)f\| = 0, \\ W(\alpha)f \neq 0 \end{cases}$$

and

$$\text{(D)} \qquad f_s = 0 \quad \textit{if and only if} \quad \lim_{t\to\infty} \|e^{-itH_\alpha}f\| = 0 \quad (e^{-itH_\alpha}f = e^{i\frac{\alpha^2}{4}t}f_d).$$

(ii) α は *Theorem 1.3* (ii) と同じとする. このとき次が成り立つ:

$$f \in \mathcal{H} \quad \text{and} \quad f \neq 0 \quad \textit{if and only if} \quad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} \|e^{-itH_{i\alpha_2}}f - e^{-itH_0}W(i\alpha_2)f\| = 0, \\ W(i\alpha_2)f \neq 0. \end{cases}$$

この Corollary は初期値がどのスペクトルに属するかによって, (1.1) の解の $t \to +\infty$ での L^2-ノルム減衰または非減衰の情報を与えるものである. (i) では $t \to +\infty$ で減衰する初期値 f としては $f \in \mathrm{Ker}P_{-\frac{\alpha^2}{4}}$ 以外はない. (ii) では全ての初期値 f に対して (1.1) の解 $\|u(\cdot,t)\|$ は減衰しないことがわかる.

§3. Results for (1.2) and (1.3)

(cf.[3]) $H^m = H^m(\mathbb{R}^N)$, $\dot{H}^m = \dot{H}^m(\mathbb{R}^N)$ $(m \geq 0)$ and $L^2 = H^0$. もし, $\{w_0, w_1\} \in \dot{H}^1 \times L^2$ ならば, エネルギー等式を満たす:

$$||w(t)||_E^2 + \int_0^t ||b(\cdot)^{1/2}w_t(\tau)||_{L^2}^2 d\tau = ||w(0)||_E^2$$

ここで,

$$||w(t)||_E^2 = \frac{1}{2}\left(||w_t(t)||_{L^2}^2 + ||\nabla w(t)||_{L^2}^2\right)$$

は時刻 t (≥ 0) での全エネルギーである.

Theorem 3.1. $b(x) = b_0(x)$ を次の関数とする:

$$b_0(x) = \begin{cases} (3-N)|x|^{-1} & (N = 1, 2), \\ (N-1)|x|^{-1} & (N \geq 3), \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき

$$w_0(x) \equiv \begin{cases} |x|f(|x|), & (N = 1) \\ f(|x|), & (N \geq 2) \end{cases}, w_1(x) = \partial_{|x|}\{w_0(|x|)\},$$

where $f(|x|)=e^{\beta|x|}g(|x|)$, $\beta<0$ *and* $g\in\mathcal{S}'$, となる初期値をとったとき (1.2) の動径方向のみに依存する解は

$$w(t,x)=\begin{cases}|x|f(|x|+t), & (N=1)\\ f(|x|+t). & (N\geq 2)\end{cases}$$

で与えられる．故に $f\in\mathcal{B}$ ならば，全エネルギーは t 無限大のとき指数減衰する．

Theorem 3.2. $b(x)=b_0(x)$ を (3.1) の中の関数とする．

$$H_b=i\begin{pmatrix}0 & 1\\ \Delta & -b\end{pmatrix}$$

とし，定義域を

$$\mathcal{D}(H_b)=\{v=(v_1,v_2)\in E\,|\,H_bv\in E\},$$

ここで $E=\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)\times L^2(\mathbb{R}^N)$ はエネルギー空間である．$N\geq 3$, (3.1) を仮定する．そのとき，

$$\sigma_p(H_b)=\mathbb{C}_-,\qquad \sigma_r(H_b)=\emptyset,$$
$$\sigma_c(H_b)=\mathbb{R},\qquad \rho(H_b)=\mathbb{C}_+.$$

(スペクトルに関する記号は §2 と同じ)

Theorem 3.3. $N\geq 3$, ある $b_1\in(0,N-2)$ が存在して $|b(x)|\leq b_1|x|^{-1}$ *in* $\mathbb{R}^N$ を仮定する．このときつぎの関係が成り立つ:

$$\sigma_p(H_b)\subset\left\{\kappa=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\mid\beta^2\leq\frac{b_1^2}{(N-2)^2-b_1^2}\alpha^2\right\}$$

Theorem 3.4. (1.3) について

$$w_0(x)=f(r)\equiv e^{i\sqrt{\sigma}r},\quad w_1(x)=0,$$

ここで $\sigma\in\mathbb{C}$, $Im\sigma<0$, $Im\sqrt{\sigma}>0$ を仮定する．(1.3) の解は $w(t,x)=f(r+t)$ で与えられ，t 無限大のとき指数減衰する．

§4. Outline of the Proofs of Theorems in §2

証明は次の順になされる:

1. H_α は maximal dissipative operator になる．
2. $H_\alpha^*=H_{\bar{\alpha}}$.
3. $(H_\alpha-z)^{-1}$ の具体的表示.
4. H_α の具体的な固有値，固有関数を求める．
5. 波動作用素 $W(\alpha)$ の存在.
6. 一般化された Fourier 変換 $\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}_0W(\alpha)$ による部分等長性.

以下，上述 3,4,6 について簡単に概略を補題および命題として記していく．H_α, H_0 のレゾルベントをそれぞれ次のように書く:

$$R_\alpha(z)=(H_\alpha-z)^{-1},\quad R_0(z)=(H_0-z)^{-1}.$$

3, 4 について．レゾルベント方程式により次の等式を得る．

Lemma 4.1. *(cf.[1])* $\varphi = \delta$ として, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\alpha_1 \leqq 0$ かつ $\alpha_2 \leqq 0$ とする. このとき, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して次が成り立つ:

$$R_\alpha(z)f = R_0(z)f - \alpha\{1 + \alpha\langle R_0(z)\varphi, \varphi\rangle\}^{-1}\langle R_0(z)f, \varphi\rangle R_0(z)\varphi$$

ここで $z \in \rho(H_0) \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 + \alpha\langle R_0(z)\varphi, \varphi\rangle \neq 0 \}$.

さらに, $f \in \mathcal{H}$ に対して,

(4.1)

$$(R_\alpha(z)f)(x) = (R_0(z)f)(x) + \int_{\mathbb{R}^1} K(x,y;z)f(y)dy,$$

$$\textit{where} \quad K(x,y;z) = -\frac{\alpha}{2i\sqrt{z}(2i\sqrt{z} - \alpha)} e^{i\sqrt{z}(|x|+|y|)} \in L^2(\mathbb{R}^1_x \times \mathbb{R}^1_y)$$

ここで $\mathrm{Im}\sqrt{z} > 0$,

$$z \in \rho(H_\alpha) = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left([0,\infty) \cup \{-\alpha^2/4\}\right) & (\alpha_1 < 0), \\ \mathbb{C} \setminus [0,\infty) \quad (\alpha_1 = 0), \end{cases}$$

特に, $\alpha_1 < 0$ のときは, 固有関数は $e^{\alpha|x|/2}$ である. また, $\sigma_{ess}(H_\alpha) = [0,\infty)$.

これは H_α のスペクトルはレゾルベント $R_\alpha(z)$ の z に関する特異点であることから, 点スペクトル $-\alpha^2/4$ $(\alpha_1 < 0)$, Weyl の補題から essential spectrum(本質的スペクトル) は H_0 のそれと同じであることが知られているからである.

ここまでで, Theorem 2.1 の前半の主張が得られる. また, (P) については,

$$P_{-\alpha^2/4}f = -\frac{1}{2\pi i}\int_C R_\alpha(z)f dz$$

ここで, C は $-\alpha^2/4$ を含む曲線である.(cf.[6]) これと (4.1) を用いて証明される.

6 について. 波動作用素 $W(\alpha)$ の存在を認める.

Proposition 4.2 (Generalized Fourier transform for H_α). *(cf.[5,6])* $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ $(\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 < 0)$ とする.

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_0 W(\alpha).$$

とおくと

$$(\mathcal{F}_\alpha f)(k) = \lim_{R\to+\infty}\int_{|x|<R} \overline{\psi_\alpha(x,k)} f(x)dx \quad \textit{in} \quad \mathcal{H} \tag{4.2}$$

$f \in \mathcal{H}$, ここで

$$\overline{\psi_\alpha(x,k)} = (2\pi)^{-1/2}\left(e^{-ixk} + \frac{\alpha}{(2i|k| - \alpha)} e^{i|x||k|}\right)$$

である. さらに

$$(\mathcal{F}_\alpha H_\alpha f)(k) = |k|^2(\mathcal{F}_\alpha f)(k) \quad \textit{for} \quad f \in \mathfrak{D}(H_\alpha). \tag{4.3}$$

この Proposition の証明は, 次の等式が成り立つことを使う:

$$\langle W(\alpha)u, v\rangle = \lim_{\kappa\to 0}\frac{\kappa}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle R_\alpha(\lambda + i\kappa)u, R_0(\lambda + i\kappa)v\rangle d\lambda$$

$u, v \in \mathcal{H}$.

さらに, Lemma 4.1 を使って,

(4.4)

$$(W(\alpha)u,v)=\lim_{\kappa\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\langle(R_0(\lambda+i\kappa)-R_0(\lambda-i\kappa))u,v\rangle d\lambda$$

$$+\lim_{\kappa\to 0}\frac{\kappa}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha}{2i\sqrt{\lambda+i\kappa}-\alpha}\int_{-\infty}^\infty e^{i\sqrt{\lambda+i\kappa}|y|}u(y)dy\overline{(R_0(\lambda+i\kappa)R_0(\lambda-i\kappa)v)}(0)d\lambda.$$

右辺第一項は $\langle u,v\rangle$ に等しいことは知られている. 第二項に対しては Poisson 積分の性質を使って,

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\alpha}{2i|k|-\alpha}\int_{-\infty}^\infty e^{i|k||y|}u(y)dy\overline{\mathcal{F}_0v(k)}dk.$$

が示される. これを使って, 次のような部分等長性が得られる.[4]

Lemma 4.3. (Generalized Parseval の等式) $f,g\in\mathcal{H}\cap L^1(\mathbb{R}^1)$, $\alpha\in\{\alpha=\alpha_1+i\alpha_2;\alpha_1<0\}\equiv D$ に対して,

$$\langle\mathcal{F}_\alpha f,\mathcal{F}_{\bar\alpha}g\rangle=\langle f,g\rangle+\frac{\alpha}{2}\langle f,e^{(\bar\alpha|\cdot|)/2}\rangle\langle e^{(\alpha|\cdot|)/2},g\rangle. \tag{4.5}$$

これは, $\alpha\in(-\infty,0)$ のとき, 自己共役作用素の結果でよく知られているものであり, 後は α に関して解析関数の一致の定理を用いればよい.

$\alpha_1=0$ のときは,

Proposition 4.4. $f,g\in\mathcal{H}\cap L^1(\mathbb{R}^1)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\mathcal{F}_{i\alpha_2}f,\chi_\varepsilon\mathcal{F}_{-i\alpha_2}g\rangle=\langle f,g\rangle+\frac{i\alpha_2}{4}\int_{\mathbb{R}^1}e^{\frac{i\alpha_2}{2}|x|}f(x)dx\int_{\mathbb{R}^1}e^{\frac{i\alpha_2}{2}|y|}\overline{g(y)}dy,$$

が成り立つ, ここで χ_a は $\{k\in\mathbb{R};a\leqq||k|+\alpha_2/2|\}$, $a>0$ 上の特性関数である.

この Proposition は認めることにする. Theorem 2.2 (i) の証明は,

$$\mathrm{Ker}P_{-\alpha^2/4}\subset\mathrm{Ker}W(\alpha)=\{f;\lim_{t\to\infty}e^{-itH_\alpha}f=0\}$$

は容易にわかる. 故に,

$$0=W(\alpha)f=W(\alpha)f_s\Longrightarrow f_s=0$$

を示せばよい. Lemma 4.3 で $L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{H}$ は稠密であるから,

$$\langle W(\alpha)f_s,W(\bar\alpha)f_s\rangle=\langle\mathcal{F}_\alpha f_s,\mathcal{F}_{\bar\alpha}f_s\rangle=\|f_s\|^2.$$

が得られ, $f_s=0$ が得られる.

Theorem 2.2 (ii) の証明は,

$$\mathcal{E}=\{g\in\mathcal{H}\cap L^1(\mathbb{R}^1):\int_{\mathbb{R}^1}|y||g(y)|dy<\infty,\quad\int_{\mathbb{R}^1}e^{-\frac{i\alpha_2}{2}|y|}g(y)dy=0\}.$$

とおく. このとき次の 3 つのことが証明される:

$$g\in\mathcal{E}\Longrightarrow F_{-i\alpha_2}g\in\mathcal{H};$$

$$f\in\mathcal{H},\quad g\in\mathcal{E}\Longrightarrow\langle\mathcal{F}_{i\alpha_2}f,\mathcal{F}_{-i\alpha_2}g\rangle=\langle f,g\rangle;$$

[4] 以下の補題で f と固有関数 $e^{(\bar\alpha/2)|x|}$ が直交するときを考えよ

(Proposition 4.4 で $L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}$ は稠密性より)

$$\mathcal{E} \text{ は } \mathcal{H} \text{ で稠密.}$$

これらを使って

$$W(i\alpha_2)f = 0 \Longrightarrow f = 0$$

が証明される.

§5. Outline of the Proofs of Theorems in §3

Theorem 3.1, 3.2 の証明は次の Proposition が本質的である.

Proposition 5.1. $b(x)$ は (3.1) のものとすると, そのとき, (1.2) の定常問題;

(5.1)
$$(-\Delta - i\kappa b(x) - \kappa^2)u(x) = 0,$$

の解は次で与えられる:

$$u(x) = \begin{cases} |x|e^{-i\kappa|x|}, & (N = 1) \\ e^{-i\kappa|x|}, & (N \geq 2) \end{cases}$$

where $\kappa = \alpha + i\beta$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ \beta < 0)$.

(5.1) を解くために,

(5.2)
$$u(x) = e^{p(|x|)},$$

(5.3)
$$p(|x|) = -i\kappa|x| - \frac{(N-1)}{2}\log|x| + \frac{1}{2}\int_1^{|x|} b(s)ds.$$

とおく. もし b が

(5.4)
$$2b_{|x|}(|x|) + b(|x|)^2 - \frac{(N-1)(N-3)}{|x|^2} = 0,$$

の解とすると, (5.2) は (2.1) の解であることがわかる.

そこで $h(r) = rb(r)$ with $r = |x|$ とおくと,

$$2rh_r(r) + (h(r) - N + 1)(h(r) + N - 3) = 0,$$

を満たすことがわかるので, (5.2) が (2.1) の解であることがわかった.

Theorem 3.1 の証明は次のようになされる. 簡単のため $N \geq 2$ を仮定する. Propositoion 5.1 により,

$$u(r;\alpha) = e^{-i(\alpha+i\beta)r}$$

は (5.1) の解であることに注意して

$$w_0(r) = u(r;\alpha), \qquad w_1(r;\alpha) = u_r(r;\alpha)$$

を初期値とする (1.2) の解は

$$w_\alpha(t,r) = u(r+t;\alpha)$$

である. 一次元の (逆)Fourier 変換を用いて,

$$g(r) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \check{\tilde{g}}(\alpha)e^{-i\alpha r}d\alpha,$$

ただし, g は

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} g(s) & (s \geq 0), \\ 0 & (s < 0), \end{cases}$$

と拡張しておく. よって

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \check{\tilde{g}}(\alpha) w_\alpha(t,r) d\alpha = e^{\beta(r+t)} \tilde{g}(r+t) = f(r+t)$$

は (1.2) の解であることがわかった.

Theorem 3.2 を証明するために次の Lemma が必要である.

Lemma 5.4. *Theorem 3.2* の仮定の下で, H_b は極大消散作用素かつ

$$Range(H_b - i) = E.$$

故に, H_b はエネルギー空間 E で縮小半群を生成する.

H_b が極大消散作用素であることは容易にわかる. $H_b - i$ の値域に関して, $h = \{h_0, h_1\} \in E$ に対して $v = \{v_0, v_1\} \in \mathcal{D}(H_b)$ で次を満たすものが存在することを示す:

$$(H_b - i)v = h.$$

これから,

$$(-\Delta + b + 1)v_1 = i(\Delta h_0 + h_1), \quad v_0 = v_1 + ih_0.$$

となる. 第一式を L^2 の枠で考える. $\mathrm{Dom}(H_b) = H^2$ (cf.[4,5]), $\nabla h_0 \in L^2$ であることに注意して,

$$v_1 = i[(-\Delta + b + 1)^{-1}\nabla] \cdot \nabla h_0 + i(-\Delta + b + 1)^{-1} h_1.$$

Theorem 3.2 の証明は次のようになされる: Proposition 3.1 により $\mathbb{C}_- \subset \sigma_p(H_b)$. また, $\kappa \in \mathbb{C}_+$ ならば

$$(\mathrm{Im}\,\kappa)||v||_E \leq ||(H_b - \kappa)v||_E.$$

から, $\sigma_p(H_b) \cap \mathbb{C}_+ = \emptyset$ も容易にわかる. $\kappa \in \mathbb{R}$ ならば, (5.1) に $\bar{u}$ を掛け部分積分することにより,

$$||\sqrt{b(\cdot)}u||^2 = 0$$

から, $\sigma_p(H_b) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ が得られる. また, $H_b^* = H_{-b}$ と

$$\kappa \in \sigma_r(H_b) \iff \overline{\kappa} \in \sigma_p(H_b^*) \quad \& \quad \kappa \notin \sigma_p(H_b)$$

に注意して, $\sigma_r(H_b) = \emptyset$ が得られる. Lemma 4.1 を使って, $\rho(H_b) = \mathbb{C}_+$ が示される.

Theorem 3.3 については,

$$(-\Delta - i\kappa b(x) - \kappa^2)u = 0$$

の両辺に $\bar{u}$ を掛け部分積分を行って実部をとると,

$$||\nabla u||^2 + \beta \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u(x)|^2 dx + \beta^2 ||u||^2 = \alpha^2 ||u||^2.$$

これに対して, Hardy の不等式:

$$||\frac{u}{|\cdot|}|| \le \frac{2}{N-2}||\nabla u||^2,$$

を用いて (左辺第二項使う $0 \le b(x) \le b_1|x|^{-1}$ に注意)

$$||u||^2|\beta|^2 - \frac{2b_1}{N-2}||\nabla u||||u|||\beta| + ||\nabla u||^2 \le \alpha^2||u||^2.$$

この左辺を平方完成して,

$$\text{左辺} \ge \left\{1 - \left(\frac{b_1}{N-2}\right)^2\right\}||\nabla u||^2$$

となることが分かる. これから,

$$\left\{1 - \left(\frac{b_1}{N-2}\right)^2\right\}||\nabla u||^2 \le \alpha^2||u||^2. \tag{5.5}$$

次に虚部については,

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u(x)|^2dx + 2\beta||u||^2 = 0$$

であるから,

$$2|\beta|||u||^2 \le \frac{2b_1}{N-2}||\nabla u||||u|| \Longleftrightarrow ||u|| \le \frac{b_1}{N-2}\frac{||\nabla u||}{|\beta|}. \tag{5.6}$$

であるから, (5.5) と (5.6) を併せて

$$\left\{1 - \left(\frac{b_1}{N-2}\right)^2\right\}||\nabla u||^2 \le \alpha^2||u||^2 \le \alpha^2\left(\frac{b_1}{N-2}\right)^2\frac{||\nabla u||^2}{|\beta|^2}$$
$$\Longleftrightarrow \left(\left\{1 - \left(\frac{b_1}{N-2}\right)^2\right\}\beta^2 - \left(\frac{b_1}{N-2}\right)^2\alpha^2\right)||\nabla u||^2 \le 0.$$

よって,

$$\kappa \notin \left\{\ \kappa = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \mid \beta^2 \le \frac{b_1^2}{(N-2)^2 - b_1^2}\alpha^2\ \right\}$$

ならば, $u = 0$ を得る.

§6. RANK 1 の消散項を持つ波動方程式

このセクションではまだ未完成であるが, いくつかの結果を述べておく. §4 の中で処方箋に従うのであるがどの点が問題となるかを考察する.

先ず, $\varphi(x) \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$, $s > 1/2$, または $|\varphi(x)| \le Ce^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$ となる関数とし (1.2) 式を

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) + \langle w_t(x,t), \varphi\rangle\varphi(x) = 0, & (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^N, \\ w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \end{cases} \tag{6.1}$$

という形で波動方程式を考える．これは作用素の形に書き換え，

$$H = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & -\langle \cdot, \varphi\rangle\varphi \end{pmatrix}.$$

このレゾルベントは $r_0(z) = (-\Delta - z^2)^{-1}$ を使って，(§4 参照)

$$R(z)f = R_0(z)f + \frac{i\langle f, \begin{pmatrix} ir_0(\overline{z})\varphi \\ \overline{z}r_0(\overline{z})\varphi \end{pmatrix}\rangle}{1 - iz\langle r_0(z)\varphi, \varphi\rangle_0}\begin{pmatrix} ir_0(z)\varphi \\ zr_0(z)\varphi \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ 内積，と書けることに注意する．

これから分かる事は，$R(z)$ の特異スペクトルは

$$\Gamma(z) := 1 - iz\langle r_0(z)\varphi, \varphi\rangle_0$$

の零点であり，特異性の位数が問題となる．(§4 参照) §2 での Schrödinger 方程式 (solvable model) の場合には Theorem 2.1, Lemma 4.1 によりスペクトルの位置、その位数が 1 であることが分かるが，(6.2) では，特異性 ($\Gamma(z)$ の零点) の位数が分かっていない．特に，$\mathrm{Im} z = 0$ となる点に対してははっきりしていない．実際に，

$$\Gamma(z) = 1 - \frac{i}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{r-z} - \frac{1}{r+z}\right) r^{N-1}\|\hat{\varphi}(r\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}dr$$

であるから，$\Gamma(\lambda_0 - i0) = 0$ ($\mathrm{Im}\lambda_0 = 0, \lambda_0 > 0$) ならば，

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Gamma(\lambda_0 - i\varepsilon)\\ =&1 - \frac{i}{2}\mathrm{p.v.}\int_0^\infty \left(\frac{1}{r-\lambda_0} - \frac{1}{r+\lambda_0}\right) r^{N-1}\|\hat{\varphi}(r\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}dr - \frac{\pi}{2}\|\hat{\varphi}(\lambda_0\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{N-1})}\\ =&0\end{aligned}$$

となり，実部，虚部が零となるがこの式からでは，位数が分からない．しかしこの困難は作用素 (レゾルベント) 全体を通して考えると処理でき，次のような結果を得られる:

Lemma 6.1. *$Imz \leq 0$ において $\Gamma(z)$ の零点の位数は 1 である.*

特殊なケースであるが，

Theorem 6.2. $N = 1$ として，

$$\Phi(r) = |\hat{\varphi}(r)|^2 + |\hat{\varphi}(-r)|^2,\ r \geq 0$$

として，$\Phi(r)$ が単調現象を仮定すると，*Theorem 2.2, Corollary 2.3* と同様の結果が成り立つ．

非自己共役作用素のレゾルベントの実軸上での特異性がどの程度になるか？ がこれからの課題である．

References

1. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh–Krohn and H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Springer, 1988.
2. M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, *On the asymptotics of solutions for some Schrödinger equations with dissipative perturbations of rank one*, to appear in Hiroshima Math. J .

3. M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, *Exponential decay and spectral structure for wave equation with some dissipations*, to be submitted .
4. M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, *Parseval formula for wave equations with dissipative term of rank1*, (in preparation) .
5. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2–nd edition, Springer–Verlag, 1976.
6. S. T. Kuroda, *Spectral Theory II*, Iwanami, Tokyo, 1978.
7. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, IV, Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.

KAZUO WATANABE, 1–5–1 MEJIRO, TOSHIMA, TOKYO 171-8588, JAPAN
E-mail address: kazuo.watanabe@gakushuin.ac.jp